

# L'origine e la natura della costante di Planck

Nader Butto

Link articoli

<https://m.scirp.org/s/searchPaper.action?kw=Nader+butto>

## Sommario

La costante di Planck  $h$  è una costante fisica fondamentale definita nell'ambito della teoria quantistica ed è determinata solamente da misurazioni fisiche e non può essere calcolata. Fino ad oggi i fisici non hanno una spiegazione convincente del perché l'azione nel microcosmo sia quantizzata o del perché  $h$  abbia uno specifico valore quantitativo. Qui viene presentata una nuova teoria basata sull'idea che le particelle elementari siano vortici di un vuoto superfluido condensato. Il vortice ha un momento angolare conservato che può essere calcolato applicando le leggi dell'idrodinamica; in questo modo si ottiene il valore numerico della costante di Planck. Pertanto, la costante di Planck non è una costante fondamentale ma un parametro osservabile della particella elementare come un vortice che ha vorticità costante e momento angolare conservato. Questa teoria può offrire un'unica e comprensibile spiegazione della costante di Planck e aprire una nuova prospettiva per la teoria del tutto.

## Parole chiave

Costante di Planck, momento angolare, raggio Compton, vorticità

## 1. Introduzione

Max Planck tenta di dare una spiegazione teorica alle leggi scoperte in modo empirico sullo spettro delle radiazioni emesse dal buco nero, nel 1900, per la prima volta nella fisica teorica appare la costante di Planck  $h$  (1). Egli propose l'ipotesi quantistica che stabiliva che l'energia di un'oscillazione armonica con una frequenza oscillatoria  $\nu$  avrebbe quantizzato un multiplo intero di  $h\nu$ . Pertanto la costante di Planck è il quanto (la più piccola quantità) di energia possibile accettato che contiene un fotone e mette in relazione l'energia in un quanto (fotone) di radiazione elettromagnetica alla frequenza della stessa. L'implicazione della scoperta di  $h$  era che l'azione degli atomi è quantizzata e che  $h$  rappresenta l'unità di azione

fondamentale per discreti sistemi su scala atomica. E' diventata una componente integrale della fisica moderna atomica e sub-atomica ed ha una grande importanza nella tecnologia, nella comprensione della realtà e della vita.

Il valore stimato della costante di Planck secondo CODATA nel 1998 era stato determinato in base all' equilibrio delle forze elettrica e gravitazionale nella così nominata bilancia di Watt [2]. In questo schema, il peso di una massa testata è comparato alla forza generata da una bobina, la cui potenza elettrica è accuratamente misurata tramite l' effetto Josephson e l'effetto Hall quantistico. Il numero scelto per il valore numerico di  $h$  è tale che, nel momento in cui si adotta la definizione, un Kg è equivalente alla massa del prototipo internazionale correntemente utilizzato per la definizione di massa nell'intervallo di incertezza dei valori delle migliori misure di  $h$  in quel momento.

Un'altra modalità di misurazione è tramite il metodo X-Ray crystal density (XRCD)[3]. Questo metodo misura la costante di Avogadro  $N_A$  per stabilire una scala di massa contando il numero degli atomi in una singola sfera di cristallo di silicio usando l'approccio XRCD, cioè sondando la disposizione regolare degli atomi in un reticolo perfetto e poi moltiplicandolo per la massa nota di un atomo di silicio (l'isotopo  $^{28}\text{Si}$ ) [4].

I valori CODATA raccomandati delle costanti fisiche fondamentali usavano i risultati di queste misure e i risultati delle misure della sopra menzionata bilancia di Watt come base per determinare la costante di Planck, che è

$$h = 6.626069 \times 10^{-34} \text{ J s [5].}$$

Ogni anno si fanno progressi nel misurare la costante di Planck; tuttavia i progressi per capire la sua natura sono piccoli. La costante di Planck è considerata una costante fisica fondamentale definita nel campo della teoria quantistica; tuttavia, finora, i fisici non hanno una spiegazione convincente del perché l'azione nel microcosmo è quantizzata o del perché  $h$  ha uno specifico valore quantitativo [6].

In precedenti articoli sono state descritte la natura e l'origine della costante di struttura fine [7], la costante gravitazionale  $G$  [8], la costante magnetica  $\mu_0$  [9], e la costante dielettrica [10].

In questo articolo, vi presentiamo una nuova teoria per descrivere l'origine della costante di Planck e rivelare la sua natura intrinseca. Il punto di partenza è la natura superfluida del vuoto che spiega la natura a forma di vortice delle particelle

elementari. Successivamente, applicando le leggi classiche dell'idrodinamica al vortice per calcolarne la vorticità e il momento angolare, viene presentata una formula analitica per ottenere il valore numerico della costante.

## 2. Il vuoto superfluido

Sebbene la teoria della meccanica quantistica non sia fondata su nessuna proprietà dello spazio, l'idea di spazio è frequentemente utilizzata per giustificare procedimenti matematici e per applicare le quantità di dettagliate proprietà spaziali come la velocità della luce nel vuoto governata dalla permeabilità del vuoto e dalla costante dielettrica. Nei primi anni della meccanica quantistica Paul Dirac teorizzò che il vuoto era in realtà riempito con particelle in uno stato di energia negativa [11], dando quindi vita al concetto del "vuoto fisico" che non è per niente vuoto. Nell'elettrodinamica quantistica, il vuoto è uno stato senza particelle di materia e fotoni ma con fluttuazioni del vuoto e con un'energia determinata chiamata energia del vuoto. Il vuoto è definito come lo stato con la più bassa energia possibile che si comporta come un superfluido. La superfluidità del vuoto è alla base delle equazioni di Maxwell, della relatività speciale e della relatività generale.

Il comportamento classico del campo elettromagnetico è descritto dalle equazioni di Maxwell, che predicono che la velocità della luce  $c$  in cui le onde elettromagnetiche (come la luce) si propagano attraverso il vuoto, è in relazione alla costante elettrica  $\epsilon_0$  e alla costante magnetica  $\mu_0$ . La relatività speciale è derivata dalle equazioni di Maxwell. Einstein realizzò in modo chiaro che sia la relatività speciale che quella generale erano basate sui modelli della fluidodinamica [12].

Nonostante ciò, la struttura microscopica del vuoto secondo la teoria quantistica dei campi è attualmente in gran parte sconosciuta. Anche in assenza di particelle reali, il vuoto è sempre riempito da coppie di particelle virtuali create e annichilate, e si prevede che queste particelle invisibili potrebbero materializzarsi per un breve periodo ed esercitare una forza misurabile. Pertanto si presume che il vuoto fisico sia un mezzo di poco conto, non vuoto ma piuttosto pieno di energia meccanica di punto zero e caratterizzato dal comportarsi come un fluido senza attrito con viscosità estremamente bassa in cui si può associare una certa energia e densità con conducibilità termica estremamente alta. Pertanto, l'energia del vuoto ha reali conseguenze fisicamente osservabili e le sue proprietà possono essere osservate avendo effetti fisici reali [13] [14].

Il vuoto si estende ovunque, non ha misura, forma, centro, direzione, tempo o estensione ed è inamovibile. Pertanto la densità del vuoto è generalmente vista come una proprietà fondamentale del cosmo, la sua grandezza non dovrebbe dipendere dal fatto che scegliamo metodi subatomici, astronomici o cosmologici per valutarne il suo valore.

Il valore della densità del vuoto dipende principalmente dalla relatività generale ed è stato determinato usando le osservazioni astronomiche della curvatura spazio-tempo e l'espansione dell'universo. L'espansione dell'universo è stata studiata utilizzando molti metodi differenti; tuttavia la missione Wilkinson Microwave Anisotropy Probe rappresenta un passo importante verso la precisione nel calcolare la costante di Hubble e la densità del vuoto [15].

Il risultato più recente [16], indica che il valore della costante di Hubble è

$H_0 = 71.9 \pm 2.4 - 3.0 \text{ km /s Mpc} = 2.33 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$  dove il numero di Km in in Mpc è  $3.09 \times 10^{19}$ . Considerando che la massa inerziale dell'universo osservabile è

$$M_u = c^3 2H_0 G = 0.8720532288 \times 10^{56} \text{ kg}$$

E il volume dell'universo è

$$V_u = 4/3 \pi R_u^3 = 4/3 \pi (c/H_0)^3 = 8.9364367479 \times 10^{81} \text{ m}^3 ,$$

la densità cosmologica si calcola sia

$$M_u / V_u = 9.75839983 \times 10^{-27} \text{ kg /m}^3 .$$

### 3. Particelle elementari come vortici

Il momento angolare (spin) di un elettrone indica che c'è una rotazione interna che conferisce la sua massa a riposo. E' diventato ovvio che è presente non solo un'oscillazione interna ma anche una sorta di moto interno alla velocità della luce. Pertanto l'apparente spazio vuoto che circonda gli elettroni è composto da "particelle virtuali" e gli elettroni sono inseparabili dalle nuvole di particelle virtuali che li circondano.

Secondo la meccanica quantistica un elettrone è composto da una nuvola di probabilità. Sebbene la misura precisa della forma di questa nuvola vada oltre la capacità dei moderni metodi, secondo il modello corrente gli elettroni sono leggermente asferici, con una distorsione caratterizzata dal momento del dipolo elettrico. Tuttavia nessun esperimento ha mai rilevato questa deviazione [17]. Pertanto proponiamo che le

particelle elementari, come i quark e gli elettroni, siano vortici circolari irrotazionali senza attrito di spazio superfluido con linee concentriche generate dal vuoto primordiale durante il Big Bang. La velocità di rotazione del fluido è maggiore al centro e decresce progressivamente allontanandosi dal centro verso il confine del vortice dove non c'è più alcun gradiente di pressione, il flusso è laminare e l'attrito è nullo. In tal caso, l'assenza di attrito renderebbe impossibile creare o distruggere il movimento del vortice. Se il punto di volume di aspirazione negativa nel centro del vortice non ha sufficiente energia per attirare i fotoni virtuali alla velocità della luce, non può verificarsi una situazione stabile [18].

In un articolo precedente [19], sono state accuratamente descritte le proprietà degli elettroni usando le leggi classiche dell'idrodinamica e descrivendo l'elettrone come un vortice.

## 4. Idrodinamica del vortice

In idrodinamica la forza  $F$  che muove il vortice è direttamente proporzionale alla pressione creata dal vortice, conosciuta come pressione dinamica  $P_d$  e all'area  $A$ :

$$F = P_d A \quad (1)$$

La pressione dinamica  $P_d$  rappresenta l'energia cinetica del fluido ed è espressa come

$$P_d = 1/2 \rho v^2 \quad (2)$$

Dove  $\rho$  è la densità del fluido e  $v=c$  è la velocità del fluido. Pertanto la forza interna del vortice è

$$F = 1/2 \rho c^2 A \quad (3)$$

L'area del vortice è approssimativamente un cerchio e il suo raggio quando il vortice viene esteso raddoppia la misura. Perciò  $A = 2\pi r^2$  e

$$F = \rho c^2 \pi r^2 \quad (4)$$

Se moltiplichiamo e dividiamo la parte destra dell'equazione per il tempo  $t$  otteniamo

$$F = \rho c t \pi r^2 c / t \quad (5)$$

La quantità  $ct$  è equivalente alla distanza  $L$ ,  $L\pi r^2$  è equivalente al volume  $Q$ ,  $\rho Q$  è equivalente alla massa  $m$ , mentre  $1/t$  è equivalente alla frequenza  $f$ , perciò

$$F = mcf \quad (6)$$

L'energia di rotazione dell'elettrone che ruota attorno al suo asse è  $E = \text{forza per distanza che un elettrone ruota in un ciclo} = 2\pi r$ ; perciò

$$E = 2\pi rcmf. \quad (7)$$

Questa è l'energia assegnata a particelle virtuali, in questo caso la frequenza indica il numero di passaggi di un'onda elettromagnetica in un secondo. La costante di Planck è l'energia trovata all'interno di un'onda.

In idrodinamica, la velocità di un elemento fluido che passa istantaneamente attraverso un dato punto dello spazio in un vortice di raggio  $r$  sarebbe costante nel tempo; perciò la circuitazione o la vorticità è  $\Gamma_e = 2\pi r_e c$ . Questa è una costante fondamentale per ogni vortice fintanto che esiste nel tempo e nello spazio e svanisce solo con la distruzione del vortice. La quantità  $\Gamma_e m_e$  è un momento angolare; perciò  $2\pi r_e c m_e$  è una costante.

Se consideriamo la lunghezza d'onda Compton,  $2.4263102367(11) \cdot 10^{-12}$  m, come la rotazione di un vortice che ha la circonferenza del nucleo  $2\pi r$ , il raggio Compton è  $2.4263102367(11) \cdot 10^{-12} / 2\pi = 3.86 \cdot 10^{-13}$  m.

Se il raggio del centro del vortice è  $3.86 \cdot 10^{-13}$  m,  $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , e  $m$  è la massa a riposo dell'elettrone  $m_0 = 9.10938356 \cdot 10^{-31}$  kg, il momento angolare è  $2\pi rcm = 6.61997943364 \cdot 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ , che è il range di discrepanza nei valori sperimentali.

In che modo  $2\pi rcm$  è in relazione con la costante di Planck?

Secondo la teoria di Planck, per fotoni con frequenza  $f$ , l'energia è data da

$$E = hf, \quad (8)$$

E l'energia della massa a riposo dell'elettrone  $E_0$ , può essere rappresentato dalla seguente formula

$$E_0 = mc^2 \quad (10)$$

Perciò

$$h = mc^2 / f. \quad (11)$$

Se la frequenza  $f = 1/t$ , allora

$$h = mc^2 t \quad (12)$$

In un vortice il tempo necessario per completare una rivoluzione è

$$t = 2\pi r_e / c. \quad (12)$$

Se sostituiamo il valore  $t$  nell'equazione (12) nell'equazione (11), otteniamo

$$h = 2\pi r_e cm. \quad (13)$$

Se  $\Gamma_e = 2\pi r_e c$ ,  $h = \Gamma_e m_e$ , and  $\Gamma_e = h / m_e = 7.274$ , allora  $r_e = \Gamma_e / 2\pi c = 3.86 \cdot 10^{-13}$  m.

Questo è il valore del raggio Compton.

Esaminando le equazioni matematiche attraverso un'analisi dimensionale si arriva a  $ML^2/T$ , che è la dimensione dell'azione, cioè dell'energia moltiplicata per il tempo; perciò è naturale pensare ad  $h$  in termini di principi di azione.

Quindi

$$E = 2\pi r_e cmf = hf. \quad (14)$$

## 5. Discussione

La costante di Planck e la velocità della luce sono le due costanti fondamentali che governano l'universo [20]. La velocità della luce è in relazione alla forza di gravità, e la costante di Planck mette in relazione l'energia alla frequenza di una particella di luce. Tutte le altre costanti, come la carica o la massa di un elettrone o la potenza delle forze nucleari, possono essere descritte in relazione di queste due costanti "dimensionali".

La costante di Planck  $h$  è molto piccola ed entra in gioco solo su scala "quantistica" di oggetti molto piccoli.

L'effetto di fissare il valore numerico della costante di Plank è una definizione dell'unità  $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$  (l'unità della quantità fisica chiamata azione), il suo valore è stato determinato sperimentalmente usando gli approcci XRDC e la bilancia di watt. Tuttavia ci sono discrepanze significative tra i valori ricavati sperimentalmente per la costante di Planck [21].

Più recentemente nel 2015, ricercatori del National Institute of Standards and Technology (NIST), (USA) riportarono un valore unico (NIST-15) per  $h$  con un'incertezza di 5.6 parti elevate a  $10^8$  su tutti i dati ottenuti usando la loro attuale bilancia di watt [22]. Inoltre sempre nel 2015 l'International Avogadro Collaboration (IAC) riportò un valore nuovo (IAC-15) con un'incertezza di 2.0 parti elevate a  $10^8$  sulla base del metodo dell'XRCD; questo valore inoltre soddisfò la condizione dei

secondi requisiti quantitativi del Comitato Consultivo per la Massa e le grandezze apparentate (CCM) per la determinazione della costante di Planck [2]. Ogni anno si fanno dei progressi nella misurazione della costante di Planck, tuttavia i progressi per comprendere la sua natura sono stato molto piccoli.

Vi presentiamo una nuova prospettiva su una vecchia idea che vede l'elettrone come un vortice di vuoto superfluido. La teoria del vuoto superfluido propone il meccanismo di generazione della massa, che può prendere il posto o supportare il meccanismo elettrodebole di Higgs. E' stato mostrato che le masse di particelle elementari potrebbero emergere come risultato dell'interazione col vuoto superfluido simile al meccanismo di generazione dei gap nei superconduttori [24] [25]. La super fluidità del vuoto sta alla base delle equazioni di Maxwell. Trovando queste equazioni, Maxwell fece alcune ipotesi sulla natura del mezzo che trasporta elettricità, magnetismo e luce. L'ipotesi principale utilizzata da Maxwell era che il mezzo sottostante poteva essere descritto usando la teoria del vortice del fluido perfetto sviluppata da Helmholtz. Perciò proponiamo che l'elettrone sia un vortice circolare irrotazionale senza attrito di spazio superfluido con linee concentriche e che si applica all'idrodinamica per esprimere il momento angolare del vortice per connetterlo alla costante di Planck.

Dall' equazione Planck- Einstein otteniamo  $h = 2\pi r_e c m$ , e dalla meccanica quantistica la lunghezza d'onda Compton standard  $\lambda$ , di una particella è data da  $\lambda = h/mc$  and  $h = \lambda c m$ . Questo indica che  $\lambda = 2\pi r_e$ ; perciò la lunghezza d'onda Compton è la stessa della circonferenza del centro dell'elettrone. Abbiamo ottenuto il raggio Compton (diverso dal raggio classico) e calcolato il momento angolare al centro del vortice, che ha dato lo stesso valore della costante di Planck. Questa è la prima volta, a nostra conoscenza, che la costante di Planck è stata ricavata da una formula analitica basata sulla teoria proposta, che spiega il meccanismo idrodinamico della costante angolare come l'origine del suo valore quantitativo e fornisce un valore preciso della costante di Planck che può essere espresso con un coerente set di unità secondo il Sistema di Unità Internazionale. (SI units). Il risultato di fissare il valore numerico della costante di Planck è una definizione dell'unità  $\text{Kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ .

## 6. Conclusioni

La costante di Planck è un'espressione del momento angolare di un vortice senza attrito di una particella elementare composto dal vuoto condensato e generata dal Big Bang da fotoni virtuali senza massa che acquisiscono massa quando si muovono nel



vortice alla velocità della luce, come descritto dalla teoria di Higgs. La circolazione nel vortice è costante e il momento angolare del vortice è conservato. Considerando la lunghezza d'onda Compton come la circonferenza del centro del vortice, abbiamo calcolato la lunghezza d'onda Compton e il momento angolare del vortice al fine di ottenere il valore della costante di Planck.

Concludiamo che la costante di Planck non è una costante fondamentale ma un parametro osservabile della particella elementare come vortice che esprime la quantità di moto conservata della circolazione del vortice. Questa teoria può offrire un'unica e profonda comprensione della costante di Planck e cambiare le definizioni di unità per fondare realizzazioni pratiche attraverso esperimenti sempre più accurati.

## Ringraziamenti

L'autore desidera ringraziare Enago (<https://www.enago.com>) per la revisione della lingua inglese e i peer review

## Conflitti di interesse

L'autore dichiara di non avere conflitti di interesse nei confronti della pubblicazione di questo documento.

## Riferimenti bibliografici

[1] Plank, M. (1900) Zur theorie des gesetzes der energieverteilung im normalspektrum.

Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 2, 237.

[2] Steiner, R., Williams, E.R., Liu, R. and Newell, D.B. (2007) Uncertainty Improvements

of the NIST Electronic Kilogram. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement , 56, 592-596. <https://doi.org/10.1109/TIM.2007.890590>

[3] Massa, E. and Nicolaus, A. (2011) Special Issue International Determination of the Avogadro Constant. Metrologia , 48, S1-119.

<https://doi.org/10.1088/0026-1394/48/2/E01>

4] Bettin, H., et al . (2013) Accurate Measurements of the Avogadro and Planck Constants

by Counting Silicon Atoms. *Annalen der Physik*, 525, 680-687.

<https://doi.org/10.1002/andp.201300038>

[5] Mohr, P.J. and Taylor, B.N. (2005) CODATA Recommended Values of the Fundamental

Physical Constants: 2002. *Reviews of Modern Physics* , 77, 1.

<https://doi.org/10.6028/NIST.SP.959e2005>

[6] Peacock, K.A. (2008) *The Quantum Revolution—A Historical Perspective*. Greenwood

Press, Westport and London.

[7] Butto, N. (2020) A New Theory on the Origin and Nature of the Fine Structure Constant. *Journal of High Energy Physics , Gravitation and Cosmology*, 6, 579-589.

<https://doi.org/10.4236/jhepgc.2020.64039>

[8] Butto, N. (2020) New Mechanism and Analytical Formula for Understanding the Gravity Constant  $G$ . *Journal of High Energy Physics , Gravitation and Cosmology* , 6, 357-367. <https://doi.org/10.4236/jhepgc.2020.63029>

[9] Butto, N. (2020) The Essence and Origin of the Magnetic Constant. *Journal of High*

*Energy Physics , Gravitation and Cosmology*, 6, 662-669.

<https://doi.org/10.4236/jhepgc.2020.64045>

[10] Butto, N. (2021) Revealing the Essence of Electric Permittivity Constant. *Journal of*

*High Energy Physics , Gravitation and Cosmology* , 7, 210-217.

[11] Dirac, P.A. (1930) A Theory of Electrons and Protons. *Proceedings of the Royal Society*

of London A : Mathematical , Physical and Engineering Sciences , 126, 360-365.

<https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0013>

[12] Condon, E.U. and Odishaw, H. (1958) Handbook of Physics, Section 29. Mcgraw-Hill, New York, 2-50.

[13] Rauscher, E.A. (1968) Electron Interactions and Quantum Plasma Physics. Journal of Plasma Physics , 2, 517-541. <https://doi.org/10.1017/S0022377800004013>

[14] Rauscher, E.A. (2004) Dynamic Plasma Excitation Modes of Propagation in the Ionosphere.

PA Press, The University of Columbus, 277.

[15] Peebles, P.J.E. and Ratra, B. (2003) The Cosmological Constant and Dark Energy. Reviews of Modern Physics , 75, 559-606.

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.559>

[16] Bonvin, V., et al . (2017) H0LiCOW V. New COSMOGRAIL Time Delays of HE 0435-1223: H0 to 3.8% Precision from Strong Lensing in a Flat  $\Lambda$ CDM Model.

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society , 465, 4914-4930.

<https://doi.org/10.1093/mnras/stw3006>

[17] Hudson, J.J., et al . (2011) Improved Measurement of the Shape of the Electron. Nature

, 473, 493-496. <https://doi.org/10.1038/nature10104>

[18] Butto, N. (2020) Electron Shape and Structure: A New Vortex Theory. Journal of

High Energy Physics , Gravitation and Cosmology , 6, 340-352.

<https://doi.org/10.4236/jhepgc.2020.63027>

[19] Ball, P. (2007) Two Constants to Rule Us All. Nature .

<https://doi.org/10.1038/news.2007.389>

[20] Mohr, P.J., Taylor, B.N. and Newell, D.B. (2012) CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 41, Article ID: 043109.

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1527>

[21] Schlamminger, S., et al . (2015) A Summary of the Planck Constant Measurements

Using a Watt Balance with a Superconducting Solenoid at NIST. *Metrologia* , 52, L5-L8. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/52/2/L5>

[22] Azuma, Y., et al . (2015) Improved Measurement Results for the Avogadro Constant

Using a <sup>28</sup>Si-Enriched Crystal. *Metrologia*, 52, 360-375.

<https://doi.org/10.1088/0026-1394/52/2/360>

[23] Zloshchastiev, K.G. (2011) Spontaneous Symmetry Breaking and Mass Generation as Built-In Phenomena in Logarithmic Nonlinear Quantum Theory. *Acta Physica Polonica B* , 42, 261-292.

[24] Avdeenkov, A.V. and Zloshchastiev, K.G. (2011) Quantum Bose Liquids with Logarithmic

Nonlinearity: Self-Sustainability and Emergence of Spatial Extent. *Journal of Physics B : Atomic , Molecular and Optical Physics* , 44, Article ID: 195303.

<https://doi.org/10.1088/0953-4075/44/19/195303>

[25] Maxwell, J. (1873) *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Sections 822 and 823.

